一（**15 分**）计算

（1）已知 A 可逆，求 $\int_0^1 e^{At}\mathrm{d}t$（用矩阵 A 或其逆矩阵表示）；

（2）设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3,a_4)^T$ 是给定的常向量，$X=(x_{ij})_{2\times 4}$ 是矩阵变量，求 $\dfrac{\mathrm{d}(\boldsymbol{X\alpha})^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}$；

（3）设 3 阶方阵 A 的特征多项式为 $|\lambda I-A|=\lambda^2(\lambda-6)$，且 A 可对角化，求 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{A}{\rho(A)}\right)^k$。

二（**15 分**）设微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax \\ \\ x(0)=x_0\end{cases},\quad A=\begin{pmatrix}5&0&8\\3&1&6\\-2&0&-3\end{pmatrix},\quad x_0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

（1）求 A 的最小多项式 $m_A(\lambda)$；　（3）求 e^{At}；　（3）求该方程组的解。

三（**15 分**）对下面矛盾方程组 $Ax=b$

$$\begin{cases}x_3=1\\x_1+x_2+x_3=1\\x_1+x_2=1\end{cases}$$

（1）求 A 的满秩分解 $A=FG$；

（2）由满秩分解计算 A^+；

（3）求该方程组的最小 2－范数最小二乘解 x_{LS}。

四（**10 分**）设

$$A=\sqrt{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}$$

求矩阵 A 的 QR 分解（要求 R 的对角元全为正数，方法不限）。

五（**10 分**）　设 $A=\alpha\beta^T\,(0\neq\alpha,\beta\in R^n,n\geq 2)$

（1）证明 A 的最小多项式是 $m(\lambda)=\lambda^2-\mathrm{tr}(A)\lambda$；

（2）求 A 的 Jordan 形（需要讨论）。

六（10 分） 设 $A\in R_r^{m\times n}$，

（1）证明 $\operatorname{rank}(I_n-A^+A)=n-r$；

（2）$Ax=0$ 的通解是 $x=(I_n-A^+A)y,\forall y\in R^n$。

七（10 分） 证明矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \cdots & \frac{1}{2^{n-1}} \\ \frac{2}{3} & 4 & \frac{2}{3^2} & \cdots & \frac{2}{3^{n-1}} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4^2} & 6 & \cdots & \frac{3}{4^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{n}{n+1} & \frac{n}{(n+1)^2} & \frac{n}{(n+1)^3} & \cdots & 2n \end{pmatrix}$$

（1）能与对角矩阵相似；（2）特征值全为实数。

八（15 分） 设 A 是可逆矩阵，$\dfrac{1}{\|A^{-1}\|}=\alpha,\|B-A\|=\beta$（这里矩阵范数都是算子范数），

如果 $\beta<\alpha$，证明

（1）B 是可逆矩阵；（2）$\|B^{-1}\|\le\dfrac{1}{\alpha-\beta}$；（3）$\|B^{-1}-A^{-1}\|\le\dfrac{\beta}{\alpha(\alpha-\beta)}$。

参考答案

一（15 分）计算

（1）已知 A 可逆，求 $\int_0^1 e^{At}\mathrm{d}t$（用矩阵 A 或其逆矩阵表示）；

（2）设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3,a_4)^T$ 是给定的常向量， $X=(x_{ij})_{2\times4}$ 是矩阵变量，求 $\dfrac{\mathrm{d}(\boldsymbol{X\alpha})^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}$；

（3）设 3 阶方阵 A 的特征多项式为 $|\lambda I-A|=\lambda^2(\lambda-6)$，且 A 可对角化，求 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{A}{\rho(A)}\right)^k$。

解

（1）$\int_0^1 e^{At}dt=A^{-1}\int_0^1\left(\dfrac{de^{At}}{dt}\right)dt=A^{-1}(e^A-I)$

（2） 由 $X\alpha=\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^4 x_{1j}a_j\\ \sum\limits_{j=1}^4 x_{2j}a_j\end{pmatrix}$，$(X\alpha)^T=\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^4 x_{1j}a_j & \sum\limits_{j=1}^4 x_{2j}a_j\end{pmatrix}$得

$$\frac{d(X\alpha)^T}{dX}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial(X\alpha)^T}{\partial x_{11}} & \dfrac{\partial(X\alpha)^T}{\partial x_{12}} & \dfrac{\partial(X\alpha)^T}{\partial x_{13}} & \dfrac{\partial(X\alpha)^T}{\partial x_{14}}\\ \dfrac{\partial(X\alpha)^T}{\partial x_{21}} & \dfrac{\partial(X\alpha)^T}{\partial x_{22}} & \dfrac{\partial(X\alpha)^T}{\partial x_{23}} & \dfrac{\partial(X\alpha)^T}{\partial x_{24}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 & a_4 & 0\\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 & a_4\end{pmatrix}$$

（3）A 的特征根为 $\lambda_1=6,\ \lambda_2=\lambda_3=0$，$\rho(A)=6$. 由于 A 可对角化，即存在可逆矩阵 C，使

$A=C\begin{pmatrix}6&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}C^{-1}$，从而 $\dfrac{A}{\rho(A)}=C\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}C^{-1}$. 故

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^k=C\lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}^k C^{-1}=C\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}C^{-1}=\frac{1}{6}A.$$

二（**15 分**）设微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax \\ \\ x(0)=x_0\end{cases},\quad A=\begin{pmatrix}5&0&8\\3&1&6\\-2&0&-3\end{pmatrix},\quad x_0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

（1）求 A 的最小多项式 $m_A(\lambda)$；　（3）求 e^{At}；　（3）求该方程组的解。

解

（1）$|\lambda I-A|=(\lambda-1)^3$，$m_A(\lambda)=(\lambda-1)^2$；

（2）$r(\lambda)=a\lambda+b=e^t(t\lambda+1-t)$，$e^{At}=r(A)=e^t\begin{pmatrix}1+4t&0&8t\\3t&1&6t\\-2t&0&1-4t\end{pmatrix}$；

（3）$x(t)=e^{At}x_0=e^t\begin{pmatrix}1+12t\\1+9t\\1-6t\end{pmatrix}$

三（**15 分**）对下面矛盾方程组 $Ax=b$

$$\begin{cases}x_3=1\\x_1+x_2+x_3=1\\x_1+x_2=1\end{cases}$$

（1）求 A 的满秩分解 $A=FG$；

（2）由满秩分解计算 A^+；

（3）求该方程组的最小 2－范数最小二乘解 x_{LS}。

解

（1）$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=FG$（不唯一）

（2）$A^+=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&1&2\\4&2&-2\end{pmatrix}$；

（3）$x_{LS}=A^+b=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$；

四（10 分）设

$$A=\sqrt{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}$$

求矩阵 A 的 QR 分解（要求 R 的对角元全为正数，方法不限）

解

$$A=\sqrt{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&4\\0&2\end{pmatrix}$$

五（10 分）　设 $A=\alpha\beta^T(0\neq\alpha,\beta\in R^n,n\geq 2)$

（1）证明 A 的最小多项式是 $m(\lambda)=\lambda^2-\mathrm{tr}(A)\lambda$

（2）求 A 的 Jordan 形（需要讨论）。

证

（1）易知 $\mathrm{rank}(A)=1$，$\mathrm{tr}(A)=\beta^T\alpha$，故

$$m(A)=A^2-\mathrm{tr}(A)A=(\beta^T\alpha)A-(\beta^T\alpha)A=O$$

又对任意的一次多项式 $g(\lambda)=\lambda+c$，$g(A)=A+cI\neq O$。反证，如果 $A+cI=O$

当 $c=0$ 时，$A=O$，矛盾。当 $c\neq 0$ 时，$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(-cI)=n\geq 2$，矛盾。

（2）由 $m(\lambda)=\lambda(\lambda-\mathrm{tr}(A))=0$ 根知，A 的特征值只能是 0 或 $\mathrm{tr}(A)=\beta^T\alpha$

当 $\mathrm{tr}(A)=\beta^T\alpha\neq 0$ 时，$m(\lambda)$ 无重根，A 可对角化，再由 $\mathrm{rank}(A)=1$ 知

$$A\sim J=\begin{pmatrix}0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \beta^T\alpha\end{pmatrix}$$

当 $\mathrm{tr}(A)=\beta^T\alpha=0$ 时，A 的特征值全是 $\lambda_0=0$，由

$$n-\mathrm{rank}(\lambda_0 I-A)=n-1$$

知 $\lambda_0=0$ 对应的特征向量只有 $n-1$ 的线性无关的，从而

$$A\sim J=\begin{pmatrix}0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}$$

六（10 分）设 $A\in R_r^{m\times n}$，

（1）证明 $\mathrm{rank}(I_n-A^+A)=n-r$；

（2）$Ax=0$ 的通解是 $x=(I_n-A^+A)y,\forall y\in R^n$。

证

（1）$I_n-A^+A=I_n-V\begin{pmatrix}\Sigma_r^{-1} & O\\ O & O\end{pmatrix}U^TU\begin{pmatrix}\Sigma_r & O\\ O & O\end{pmatrix}V^T=I_n-V\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}V^T$

$$=V\left(I-\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}\right)V^T=V\begin{pmatrix}O & O\\ O & I_{n-r}\end{pmatrix}V^T$$

所以 $\mathrm{rank}(I_n-A^+A)=n-r$。

（2）由 $A(I_n-A^+A)=A-AA^+A=A-A=O$，知 I_n-A^+A 的列都是 $Ax=0$ 的解，

其中又有 $n-r$ 个线性无关的，故其线性组合 $(I_n-A^+A)y,\forall y\in R^n$ 就是 $Ax=0$ 通解。

七（10 分）证明矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \cdots & \frac{1}{2^{n-1}} \\ \frac{2}{3} & 4 & \frac{2}{3^2} & \cdots & \frac{2}{3^{n-1}} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4^2} & 6 & \cdots & \frac{3}{4^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{n}{n+1} & \frac{n}{(n+1)^2} & \frac{n}{(n+1)^3} & \cdots & 2n \end{pmatrix}$$

（1）能与对角矩阵相似；（2）特征值全为实数。

证：（1）$R_k=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{k}{(k+1)^i}=1-\frac{1}{(k+1)^{n-1}}<1$

G_k 互不交，说明 A 有 n 个不同的特征值，从而可对角化。

（2）G_k 关于实轴对称，如果 A 有复特征值必成对共轭出现，而 G_k 中只有一个特征值，所以必为实数。

八（15 分） 设 A 是可逆矩阵，$\frac{1}{\|A^{-1}\|}=\alpha,\|B-A\|=\beta$（这里矩阵范数都是算子范数），

如果 $\beta<\alpha$，证明

（1）B 是可逆矩阵；（2）$\|B^{-1}\|\le\frac{1}{\alpha-\beta}$；（3）$\|B^{-1}-A^{-1}\|\le\frac{\beta}{\alpha(\alpha-\beta)}$。

证 （方法一）

（1）$\|x\|=\|A^{-1}Ax\|\le\|A^{-1}\|\|Ax\|=\frac{1}{\alpha}\|(A-B)x+Bx\|$

$$\le\frac{1}{\alpha}\left(\|(A-B)x\|+\|Bx\|\right)\le\frac{\beta}{\alpha}\|x\|+\frac{1}{\alpha}\|Bx\|$$

$$(\alpha-\beta)\|x\|\le\|Bx\| \qquad (*)$$

因此，$\forall x \neq 0 \Rightarrow Bx \neq 0$，说明 B 可逆。

（2）由式（*），取 $x = B^{-1}y$

$$(\alpha-\beta)\|B^{-1}y\| \leq \|BB^{-1}y\| = \|y\| \Rightarrow \|B^{-1}y\| \leq \frac{1}{\alpha-\beta}\|y\|$$

由算子范数的定义得 $\|B^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\alpha-\beta}$

（3）$\|B^{-1}-A^{-1}\| = \|B^{-1}(A-B)A^{-1}\| \leq \|B^{-1}\|\|A-B\|\|A^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\alpha-\beta}\cdot\beta\cdot\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{\beta}{\alpha(\alpha-\beta)}$

（方法二）

引理：设 $A \in C^{n\times n}$，若 $\|A\| < 1$，则 $I-A$ 可逆，并有 $\|(I-A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1-\|A\|}$。

（1）$\|I-A^{-1}B\| = \|A^{-1}(B-A)\| \leq \|A^{-1}\|\|B-A\| = \dfrac{\beta}{\alpha} < 1$ （**）

由引理知，$A^{-1}B = I-(I-A^{-1}B)$ 可逆，从而 B 可逆。

（2）$B^{-1} = \left(I-(I-A^{-1}B)\right)^{-1}A^{-1}$，由式（**）和引理

$$\|B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|\left\|\left(I-(I-A^{-1}B)\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{1-\|I-A^{-1}B\|} \leq \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\beta}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha-\beta}$$

（3）同上。